Caracterización de Soluciones en Teoría de Juegos

Francisco Sánchez Sánchez

Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Febrero 6, 2009

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \longrightarrow S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \longrightarrow S$
- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \rightarrow S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

  Axioma 1
  Axioma 2

  Axioma m

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

  Axioma 1
  Axioma 2

  Axioma m

La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \rightarrow S$

- A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

- Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1
Axioma 2

Axioma m

La técnica

Teorema

Existe una única

$$\varphi : G \longrightarrow S$$

que satisface los axiomas anteriores. Además,

$$\varphi(v) = \dots$$

Juegos Cooperativos

- Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

  tal que $v(\varnothing) = 0$.
- $v(S)$ es la valía de la coalición S.
- G conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores N.
- Problema: Asociar a cada $v \in G$,un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Juegos Cooperativos

- Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

- $v(S)$ es la valía de la coalición S.
- G conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores N.
- Problema: Asociar a cada $v \in G$,un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

Juegos Cooperativos

- Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

  tal que $v(\varnothing) = 0$.
- $v(S)$ es la valía de la coalición S.
- G conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores N.
- Problema: Asociar a cada $v \in G$,un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

Juegos Cooperativos

- Dado un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

  tal que $v(\varnothing) = 0$.

- $v(S)$ es la valía de la coalición S.
- G conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores N.
- Problema: Asociar a cada $v \in G$,un vector $x \in \mathbb{R}^N$, es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Ejemplo.

Supongamos:

- N conjunto de museos.
- boleto común.
- $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los S museos.
- $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo i.

Ejemplo.

Supongamos:

- N conjunto de museos.
- boleto común.
- $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los S museos.
- $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo i.

Ejemplo.

Supongamos:

- N conjunto de museos.
- boleto común.
- $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los S museos.
- $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo i.

Ejemplo.

Supongamos:

- N conjunto de museos.
- boleto común.
- $v(S)$ lo que se recave con boletos que exactamente visitan los S museos.
- $\varphi_i(v)$ lo que le toca al museo i.

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w)=\varphi(v)+\varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v)=\theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S\cup\{i\})=v(S)$ para todo $S\subseteq N\backslash\{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v)=0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi: G\to\mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\not\ni i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left(v(S\cup\{i\})-v(S)\right)$$

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \to \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right)$$

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i\in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N\backslash\{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \to \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right)$$

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi : G \to \mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right)$$

Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad) $\varphi(v+w)=\varphi(v)+\varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría) $\varphi(\theta v)=\theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia) $\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=v(N)$

El jugador i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S\cup\{i\})=v(S)$ para todo $S\subseteq N\backslash\{i\}$.

Axioma 4 (Nulidad) Si i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v)=0$.

Teorema

(Shapley 1953) Existe una única $\varphi: G\to\mathbb{R}^N$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\not\ni i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left(v(S\cup\{i\})-v(S)\right)$$

Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$
- **Definición**
  A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:
  $$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i,j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$
-

Definición
A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = v(S)$$

Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$
- **Definición**
  A la función $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:
  $$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = v(S)$$

Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$
-

Definición

A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

Juegos y gráficas

- $$(N, v) \tag{1}$$
- $$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$
- $$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$
- Definición
  A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

Juegos y gráficas

- **Definición**
  La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i,j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i,j\}).$$

- **Definición**
  La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i,j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i,j\}).$$

Juegos y gráficas

- Definición
  La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \backslash \{i,j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

- Definición
  La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \backslash \{i,j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

Juegos y gráficas

- Definición
  La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \backslash \{i,j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

  -

Definición
La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i,j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \backslash \{i,j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

Juegos y gráficas

- Definición
  La regla de asignación ψ es estable si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

- Definición
  La regla de asignación ψ es justa si y sólo si para toda $g \in GR$ y $\{i, j\} \in g$ se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

Juegos y gráficas

- **Definición**
  Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

- **Teorema**
  (Myerson). Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde Sh es el Valor de Shapley. Además si ν es superaditivo la regla de

Juegos y gráficas

- Definición
  Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:
  $$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

  - Teorema
    (Myerson). Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:
    $$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$
    donde Sh es el Valor de Shapley. Además si ν es superaditivo la regla de asignación es estable.

Juegos y gráficas

- Definición
  Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

- Teorema
  (Myerson). Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

  donde Sh es el Valor de Shapley. Además si ν es superaditivo la regla de asignación es estable.

Juegos y gráficas

- Definición
  Para cada pareja $(\nu, g) \in G \times GR$ sea $\nu/g \in G$ definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

- Teorema
  (Myerson). Dado un juego ν existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$ la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \textit{ para todo } g \in GR$$

  donde Sh es el Valor de Shapley. Además si ν es superaditivo la regla de asignación es estable.

La distribución de herencias

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

$$M = \{1, \ldots, n\}$$

$$A$$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, \; v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

La distribución de herencias

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

$$M = \{1, \ldots, n\}$$

$$A$$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, \; v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

La distribución de herencias

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

$$M = \{1, \ldots, n\}$$

$$A$$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, \; v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

$$A$$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, \; v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

La distribución de herencias

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

$$M = \{1, \ldots, n\}$$

$$A$$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N,\ v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

La distribución de herencias

Problema

La matriz A, donde a_{ij} es el valor que el heredero j le da al bien i.

Solución

(u, x) donde u es lo que le toca a los herederos en bienes y x el vector de conpensaciones economicas.

$\varphi(u, v) \quad$ compensaciones

La distribución de herencias

Problema

La matriz A, donde a_{ij} es el valor que el heredero j le da al bien i.

Solución

(u, x) donde u es lo que le toca a los herederos en bienes y x el vector de conpensaciones economicas.

$\varphi(u, v)$ compensaciones

La distribución de herencias

Problema

La matriz A, donde a_{ij} es el valor que el heredero j le da al bien i.

Solución

(u, x) donde u es lo que le toca a los herederos en bienes y x el vector de conpensaciones economicas.

$\varphi(u, v)$ compensaciones

La distribución de herencias

Axiomas

A1 $\iota'\varphi(u,v) = 0$.

A2 $(u_i + \varphi_i(u,v))v_j = (u_j + \varphi_j(u,v))v_i$.

A3 (u,x) es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución $(\widetilde{u},\widetilde{x})$ tal que

$$\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

La distribución de herencias

Axiomas

A1 $\iota'\varphi(u,v) = 0$.

A2 $(u_i + \varphi_i(u,v))v_j = (u_j + \varphi_j(u,v))v_i$.

A3 (u,x) es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución $(\widetilde{u},\widetilde{x})$ tal que

$$\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

La distribución de herencias

Axiomas

A1 $\iota' \varphi(u, v) = 0$.

A2 $(u_i + \varphi_i(u, v))v_j = (u_j + \varphi_j(u, v))v_i$.

A3 (u, x) es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución $(\widetilde{u}, \widetilde{x})$ tal que

$$\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

Teorema

La solución (u, x) satisface los axiomas A1, A2 y A3 si y sólo si u proviene de los mejores postores y $\frac{\iota' u}{\iota' v} v - u$.

Referencias

- Dubey P., Neyman A. and Weber R.J. (1981). "Value Theory without Efficiency", *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.1, pp. 122-128.

- Hernández-Lamoneda L., Juárez-García R. and Sánchez-Sánchez F. "Dissection of cooperative solutions in game theory using representation techniques", Int. J. Game Theory **35** (2007), pp. 395-426.

- Myerson R. B., (1977) "Graphs and cooperation in games", *Mathematics of Operations Researh*, vol. 2, núm. 3, pp. 225-229.

- Sánchez Sánchez F., (2002)"About inheritance distribution", *Journal of Mathematical Economics*, 37, pp.297-309.

- Shapley L. S., "A value for *n*–person games", *Contribution to the Theory of Games*, vol. 2, 1953, pp. 307-317.